

# אוניברסיטת ת"א סמסטר א' תש"ע

## מבני נתונים – תרגיל מס. 8

1. בכיתה ראינו אלגוריתם ליניארי המממש פעולת select ע"י חלוקת הקלט לחמישיות.  
א. האם האלגוריתם ירוץ בזמן ליניארי גם אם יחולקו איברי הקלט לקבוצות בנות 7 איברים?  
ב. מדוע זמן הריצה של SELECT אינו ליניארי כאשר החלוקה היא לקבוצות בנות 3 איברים?
2. נתון מערך בגודל  $n$  ללא ערכים כפולים ושני מספרים שלמים  $k_1$  ו- $k_2$  המקיימים  $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$ .  
א. תארו אלגוריתם שמחזיר את כל האיברים שדרגתם במערך בין  $k_1$  ל- $k_2$  (כלומר האיברים שדרגתם  $(k_1, k_1+1, \dots, k_2)$  בזמן ריצה  $O(n)$  (דרגה של איבר במערך היא מספר האיברים הקטנים ממנו או שווים לו).  
ב. נגדיר  $k = k_2 - k_1$ . מה זמן הריצה האופטימלי כפונקציה של  $n$  ו- $k$  שניתן להשיג אם דורשים שהאיברים יוחזרו ממוינים?
3. תהי  $H$  טבלת Hash בגודל  $n$  שמשמשת ב-rehash ואינה מאפשרת מחיקות. נוסף לכל תא  $i$  בטבלה מונה  $c_i$  שסופר את המפתחות  $k$  שהוכנסו לטבלה ומקיימים  $h_1(k) = i$ .  
א. כיצד ניתן להשתמש במונים כדי להקטין את מספר הגישות לתאים בטבלה בחיפוש כושל?  
ב. תנו דוגמה לחיפוש כושל שעבורו מספר הגישות לתאים בטבלה קטן מ- $n$  ל-2 (ע"י שימוש בהצעה מסעיף א').
4. משפחת פונקציות  $H$  מ- $U$  ל- $\{0, 1, \dots, m-1\}$  היא 100-weakly universal אם לכל  $x$  ו- $y$  ב- $U$  השונים זה מזה מתקיים  
$$\Pr_{h \in H}[h(x) = h(y)] \leq 100/m.$$
  
תהי  $U = \{0, 1, \dots, u-1\}$  קבוצת מפתחות כך ש- $m > 100$  ו- $u \gg m$ .  
נגדיר את הפונקציה  $f_a$  כך:  
$$f_a(x) = ax \bmod m.$$
  
הראו כי מחלקת הפונקציות  $H = \{f_a \mid 0 < a < m\}$  איננה 100-weakly universal.
5. נתונה טבלת Hash בגודל  $m$  המשמשת לאחסון  $n$  איברים,  $n \leq m/2$ . התנגשויות נפתרות ע"י open addressing.  
א. בהנחת ה-uniform hashing, הראו כי עבור  $n, i = 1, 2, \dots$ , ההסתברות שמספר הבדיקות הדרושות להכנסה ה- $i$  גדול ממש  $k$  היא לכל היותר  $2^{-k}$ .  
ב. הראו שעבור  $n, i = 1, 2, \dots$ , ההסתברות שההכנסה ה- $i$  דורשת יותר מאשר  $2 \log n$  בדיקות היא לכל היותר  $1/n^2$ .  
ג. יהי  $X_i$  משתנה מקרי המציין את מספר הבדיקות הדרושות להכנסה ה- $i$ . בסעיף ב' הראיתם כי  $\Pr[X_i > 2 \log n] \leq 1/n^2$ . יהי  $X$  מ"מ המציין את מספר הבדיקות המקסימאלי הדרוש להכנסה כלשהי מבין  $n$  ההכנסות. הראו כי  
$$\Pr[X > 2 \log n] \leq 1/n.$$

השתמשו לשם כך בחסם האיחוד -

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i P(A_i).$$